Stabilité des systèmes

Condition nécessaire (mais non suffisante) pour obtenir la non-divergence de la solution homogène d'une équation différentielle (d'ordre premier ou second) : il faut que tous les coefficients de cette équation soient de même signe.

1. Le premier ordre

Considérons une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$y' + a\,y = 0$$

Quitte à diviser par le terme devant y', on a une équation normalisée. On a une solution de la forme suivante :

$$y(t) = e^{-at}$$

Si le terme n'est pas de même signe que celui devant y' (ie positif, on a normalisé), alors le contenu de l'exponentielle est positif pour t positif, l'exponentielle diverge, donc la solution diverge.

2. Le second ordre

Considérons une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = d(x), \text{ avec } a \neq 0$$

La doxa dit que dans le cas où tous les coefficients ne sont pas de même signe, alors la solution de l'équation différentielle **diverge**. Vérifions cela.

Tout d'abord, considérons celle équation différentielle sans second membre, car seule la solution de l'équation homogène nous intéresse ici. Normalisons l'expression (avec des coefficients constants et a non nul, on ne devrait pas avoir peur...), on obtient :

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0, \text{ on peut poser } \alpha = \frac{b}{a}, \beta = \frac{c}{a}$$

On obtient alors l'équation caractéristique suivante :

$$r^2 + \alpha\, r + \beta = 0$$

Dont on peut déterminer les solutions...

$$r_{1,2} = \frac{-\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \text{ avec } \Delta = \alpha^2 - 4\beta$$

On a d'ailleurs une relation reliant r1 et r2 :

$$r_1 r_2 = \beta\, et\, (r_1 + r_2) = -\alpha$$

On obtient la solution homogène suivante (on imagine deux solutions distinctes, le cas de la racine double est simple à élucider puisque le produit est naturellement positif, reste l'étude de la somme des racines, qui va donner la divergence ou convergence...)

$$y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$$

On distingue dès lors deux cas :

- Si les racines sont réelles, alors si alpha et bêta sont positifs (*dans ce cas, tous les coefficients sont de même signe*), alors on en déduit que les deux racines sont négatives, on a la divergence. Dans les autres cas, on a soit les deux racines positives, soit l'une d'entre elles positive, ce qui est une condition suffisante pour établir la divergence de la solution homogène.
- Si les racines sont complexes, on peut alors écrire de telle manière la solution homogène :

$$y(t) = \lambda_1 e^{Re(r_1)t} e^{iIm(r_1)t} + \lambda_1 e^{Re(r_2)t} e^{iIm(r_2)t}$$

Les exponentielles complexes sont bornées, la condition suffisante ici est alors que les parties réelles de r1 et r2 soient réelles. Or dans le cas de racines complexes, on se rappelle qu'elles sont conjuguées (on peut facilement le voir avec l'expression générale des solutions, cf supra...), donc r1=r2=r...

$$r_1 + r_2 = 2Re(r) = -\alpha$$

On en déduit qu'il faut alpha positif. Enfin, il faut aussi bêta positif, sinon ce ne sont pas des racines complexes (revoir l'expression de delta...).

On obtient le résultat tant convoîté !