Outils mathématiques

Différentielle logarithmique

1. Généralités

Différentielle : $f : df = f'(x)dx$

Cas du logarithme : Si $f(x) = ln(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$; on a donc $d(ln(x)) = \frac{dx}{x}$

Exemple : On considère la loi d'Ohm $R = \frac{U}{I}$, qu'on compose par le logarithme, on obtient alors : $ln(R) = ln(U) - ln(I)$

Or, l'opérateur différentielle est **linéaire**, d'où $\boxed{\frac{dR}{R} = \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I}}$

Incertitudes-type : On peut assimiler la différentielle à l'incertitude-type. Toutefois, il faut faire attention, les incertitudes se combinent **quadratiquement** ! Dans le cas précédent, on a alors : $\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 = \left(\frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I}\right)^2 \Rightarrow \boxed{u(R) = R \cdot \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I}\right)^2}}$

2. Exemple : champ gravitationnel et pendule simple

(*Se réfère à la question 2.1.3. du DM_7 de l'an dernier*)

Pour un pendule simple, on sait que $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, d'où $g = 4\pi^2\frac{\ell^2}{T^2}$

On utilise la **différentielle** : $\frac{dg}{g} = \frac{d\ell}{\ell} - 2\,\frac{dT}{T}$

On passe ensuite aux **incertitudes** : $\left(\frac{u(g)}{g}\right)^2 = \left(\frac{u(\ell)}{\ell}\right)^2 + \left(2\,\frac{u(T)}{T}\right)^2$

On peut considérer que $u(\ell)$ est négligeable, on a alors $\frac{u(g)}{g} = 2\,\frac{u(T)}{T}$

On élargit : $\boxed{\frac{\Delta g}{g} = 2\frac{\Delta T}{T}}$